

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

57e jaargang
1981/1982
no. 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens - W.P. de de Porto - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 45,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,—; contributie zonder Euclides *f* 25,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 39.75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 23.15. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

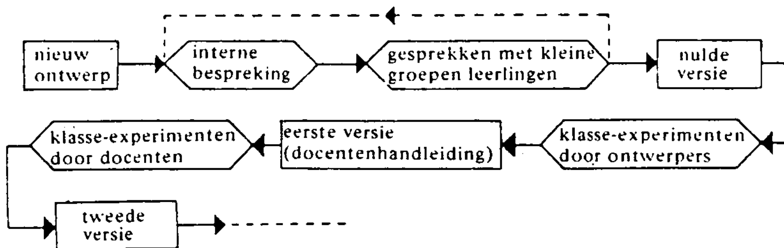
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6.50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Leerplanontwikkeling onderweg 2a en 2b

P. G. J. VREDENDUIN

Leerplanontwikkeling onderweg is een verslag van de werkzaamheden van Wiskivon (wiskunde in het voortgezet onderwijs), voorzover deze betrekking hebben op het onderwijs aan twaalf- tot zestienjarigen.
In oktober 1977 verscheen deel 1. Dit is besproken in Euclides 54, no 1, blz. 15-26. Thans zijn gereedgekomen de delen 2a (voorjaar 1980) en 2b (najaar 1978). Omvang 177 resp. 75 blz.
Hoe de teksten, vaak met vallen en opstaan, tot stand komen, ziet men in het volgende schema.

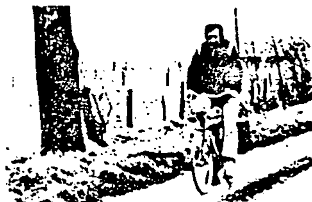


Uitvoerig wordt in deze brochure stilgestaan bij de *gemaakte fouten en de manier waarop deze, indien mogelijk, geredresseerd zijn.* Vanuit didactisch oogpunt zijn deze beschouwingen erg interessant en daarom wil ik er iets van weergeven.

1 *Wiskunde voor de brugklas.* Dit project is ontworpen in samenwerking met de NOT. De leerlingen zien eerst een televisieuitzending en gaan daarna zelf aan het werk.
Dick Passchier gaat op vakantie. Judith Bosch zal hem opzoeken. Dick schrijft een brief aan Judith met voldoende gegevens om haar in staat te stellen zijn vakantieadres op te sporen. Maar daarvoor moet ze wel diverse wiskundige activiteiten verrichten.
Hierna de eerste en tweede versie van het begin van de brief.

Welk gebied?

In het eerste televisieprogramma hebben we gezien dat Dick zijn vakantie doorbrengt in een plaats ergens in Nederland.
Net als Judith gaan we eerst maar eens uitzoeken welke plaatsen dat kunnen zijn.
We gebruiken daarvoor de gegevens die Judith van Dick heeft gekregen.



De plaats waar ik mijn vakantie ga doorbrengen, heb ik op het kaartje van Nederland met een zwarte stip aangegeven.
Om het je niet te gemakkelijk te maken, heb ik ook andere plaatsen met een zwarte stip aangegeven.
Ik vertrek 's morgens om 9.00 uur op de fiets uit Hilversum en kom dan 's middags tussen 12.30 uur en 15.00 uur aan op mijn vakantieadres.
Ik vertel je er meteen maar bij dat ik na elke twee uur fietsen een half uur rust neem.

Gereviseerd werkblad

deel I eerste probleem Welk gebied?

In het eerste televisieprogramma hebben we gezien, dat Dick zijn vakantie doorbrengt in een plaats ergens in Nederland.
Net als Judith gaan we uitzoeken waar Dick zou kunnen zitten.

Hieronder zie je de brief die Judith van Dick kreeg.
Lees het eerste kantje van die brief goed door.



Beste Judith,

Natuurlijk ga ik je in deze brief niet zomaar vertellen naar
welke plaats ik op vakantie ga. Dan had ik het je net zo
goed meteen kunnen zeggen! Maar met de gegevens in
deze brief kun je zelf de vakantieplaats opsporen.
Bij deze brief zit een kaartje van Nederland. De plaats
waar ik mijn vakantie ga doorbrengen heb ik op dat
kaartje met een zwarte stip aangegeven. Om het niet
te gemakkelijk te maken, heb ik ook andere plaatsen
met een zwarte stip aangegeven.
Ik vertrek 's morgens om 9.00 uur op de fiets uit
Hilversum. Elke keer als ik twee uur gefietst heb,
neem ik een half uur pauze.
Hoe laat ik precies aankom, zeg ik je niet. Ik verklap
alleen dat het 's middags tussen [illegible] uur en 15.00 uur is

Waarom revisie? In de oorspronkelijke tekst realiseren de leerlingen zich onvoldoende, dat het hier om een brief gaat. Aanhef en geschreven schrift in de gereviseerde versie maken dit duidelijker. Het geheel spreekt de leerling daardoor beter aan. Bovendien is de stijl veranderd. De tekst was te 'volwassen' en had niet de verteltrant die een brief eigen is.

Nu beginnen de opdrachten. Op blz. 000 staat het betreffende werkblad in oude versie, op blz. 000 en 000 in gereviseerde versie. Op blz. 000 staat het bijbehorende kaartje van Nederland. Door de verkleinde weergave is de schaal nu 1 : 2 000 000.
Wat ging er allemaal mis bij de oude versie? Veel meer dan u, ook bij aandachtige lezing, zult vermoeden.
Sommige leerlingen verwarren de tijd die Dick onderweg is, met de tijd dat er gefietst wordt.
12.30 wordt verward met half twaalf, vanwege de uitspraak.
Niet duidelijk is wat de bedoeling is van het aankomen tussen 12.30 en 15 uur. Sommige leerlingen denken dat ze zelf een tijdstip mogen kiezen.
De proefrit wordt verward met de echte fietstocht.
Het bleek dat velen er geen idee van hadden, wat met 'gemiddelde' bedoeld wordt. Ook met de term 'snelheid' had men moeite.
De veelheid van gegevens die verwerkt moesten worden om de kleinste en de grootste gemiddelde snelheid te vinden, was een onoverkomelijk struikelblok.
Het rekenwerk geeft veel moeilijkheden.
Dick blijkt hoogstens 100 km gefietst te hebben. Op de kaart is dit $6\frac{2}{3}$ cm. Dit konden de leerlingen niet afmeten; $6\frac{2}{3}$ stond niet op de liniaal.
De afkorting 'km/u' geeft problemen.

De nieuwe tekst is aanmerkelijk beter. Aan de essentie van de bedoeling is niet getornd, maar voor de leerlingen is het geheel beter hanteerbaar geworden.
Let op resp. de volgende verbeteringen.
Er staat '<u>die</u> tocht', met streep onder 'die'.
12.30 is door 12 uur vervangen.
In de brief staat nu: 'Hoe laat ik precies aankom, zeg ik je niet. Ik verklap alleen dat het 's middags tussen 12 en 15 uur is.'
Er staat '*die* tocht', met streep onder 'die'.
Er wordt nog maar één proefrit gehouden.
In plaats van over gemiddelde snelheid te spreken, wordt gevraagd hoeveel km Dick in één uur fietst.
De getallen in de proefrit zijn iets gewijzigd, waardoor de maximale afstand 90 km wordt. Dat is 6 cm op de kaart.
Er staat 'km per uur'.
Verrassend is wat er allemaal mis kan gaan en hoe met eenvoudige ingrepen dit voorkomen kan worden, en wel op zodanige wijze dat alleen overbodige moeilijkheden (ruis) voorkomen worden.

Werkblad oude versie

De plaats waar ik mijn vakantie ga doorbrengen, heb ik op het kaartje van Nederland met een zwarte stip aangegeven.
Om het je niet te gemakkelijk te maken, heb ik ook andere plaatsen met een zwarte stip aangegeven.

Op het kaartje van Nederland zien we welke plaatsen dat zijn.

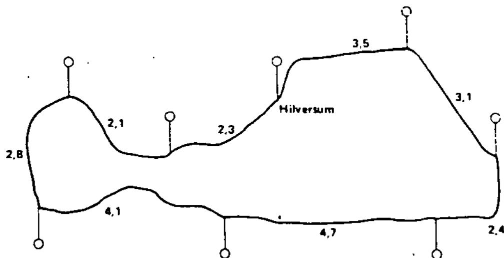
Ik vertrek 's morgens om 9.00 uur op de fiets uit Hilversum en kom dan 's middags tussen 12.30 uur en 15.00 uur aan op mijn vakantieadres.
Ik vertel je er meteen maar bij dat ik na elke twee uur fietsen een half uur rust neem.

We kunnen nu uitrekenen wat de **tijdsduur** van de fietstocht van Dick kan zijn.

Hij fietst minimaal (minstens) [uur] .

Hij fietst maximaal (hoogstens) [uur] .

Om een idee te krijgen hoe ver ik gekomen kan zijn, moet je ook nog weten hoe langzaam of hoe snel ik fiets. Omdat ik dat zelf ook wel eens wilde weten, heb ik vorige week elke avond de route gefietst die hieronder staat aangegeven.
De langste tijd die ik voor deze route nodig had was 1 uur en 40 minuten, de kortste tijd was 1 uur en 15 minuten. Op weg naar mijn vakantieadres zal ik niet langzamer en niet sneller fietsen.



Met deze gegevens kunnen we te weten komen hoe langzaam of hoe snel Dick fietst. Daarvoor moeten we zijn **kleinste gemiddelde snelheid** en zijn **grootste gemiddelde snelheid** uitrekenen. Deze snelheden drukken we uit in kilometers per uur.

Zijn kleinste gemiddelde snelheid is [km/u] .

Zijn grootste gemiddelde snelheid is [km/u] .

Met wat we nu weten over tijdsduur en snelheid gaan we uitrekenen welke **afstand** Dick afgelegd kan hebben.

Hij heeft minimaal afgelegd [km] .

Hij heeft maximaal afgelegd [km] .

Gereviseerd werkblad

In de brief staan erg veel gegevens bij elkaar en we kunnen toch niet alles tegelijk doen. Laten we daarom die brief eens stukje voor stukje bekijken. Misschien zien we dan beter wat we kunnen doen.

> *Bij deze brief zit een kaartje van Nederland. De plaats waar ik mijn vakantie ga doorbrengen, heb ik op dat kaartje met een zwarte stip aangegeven. Om het niet te gemakkelijk te maken, heb ik ook andere plaatsen met een zwarte stip aangegeven.*

Op bladzijde 4 zie je dat kaartje van Nederland.
Noem nu eens drie plaatsen wáár Dick zou kunnen zitten.

Noem eens drie plaatsen waar Dick *niet* kan zitten.
Zeg erbij waarom dat niet kan.

> *Ik vertrek 's morgens om 9.00 uur op de fiets uit Hilversum. Elke keer als ik twee uur gefietst heb, neem ik een half uur pauze.*
> *Hoe laat ik precies aankom, zeg ik je niet. Ik verklap alleen dat het 's middags tussen 12.00 uur en 15.00 uur is.*

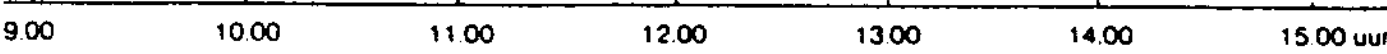
Hoe lang is Dick *onderweg* geweest?

9.00 — 10.00 — 11.00 — 12.00 — 13.00 — 14.00 — 15.00 uur

Minstens [ ] uur.
Hoogstens [ ] uur.

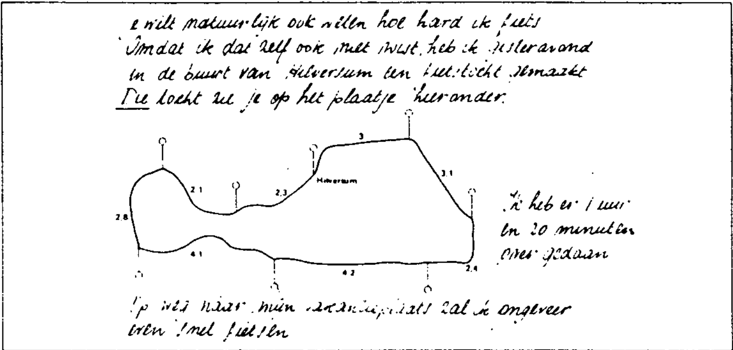
Gereviseerd werkblad

We kunnen ook uitrekenen hoe lang Dick *echt gefietst* heeft.



Minstens [ ] uur.
Hoogstens [ ] uur.

Is het mogelijk dat Dick 4 uur fietst? [ ]
Is het mogelijk dat Dick $5\frac{1}{2}$ uur fietst? [ ]
Is het mogelijk dat Dick $2\frac{1}{2}$ uur fietst? [ ]



Reken hieronder uit hoeveel km Dick *in één uur* ongeveer fietst.

[ ]

Dick fietst ongeveer [ ] km per uur.

Vind je dat Dick hard of langzaam fietst?

[ ]

We weten nu *hoe snel* Dick fietst.
We weten ook *hoeveel uur* hij minstens en hoeveel uur hij hoogstens fietst.
Reken uit *hoeveel km* Dick minstens en hoeveel km hij hoogstens aflegt.

Minstens [ ] km.
Hoogstens [ ] km.


Schaal 1 : 1 500 000
Dokkum
Delfzijl
Groningen
Leeuwarden
Harlingen
Drachten
Sneek
Assen
Heerenveen
Den Helder
Steenwijk
Emmen
Emmeloord
Meppel
Hoogeveen
Alkmaar
Kampen
Zwolle
Lelystad
Velsen
Zaanstad
Amsterdam
Haarlem
Amstelveen
Harderwijk
Almelo
Deventer
Hengelo
Hilversum
Apeldoorn
Enschede
Leiden
Amersfoort
Zutphen
Zeist
Utrecht
's-Gravenhage
Ede
Rheden
Hoek van Holland
Gouda
Winterswijk
Delft
Arnhem
Vlaardingen
Rotterdam
Tiel
Nijmegen
Dordrecht
Oss
's-Hertogenbosch
Breda
Tilburg
Roosendaal
Middelburg
Goes
Helmond
Eindhoven
Vlissingen
Venlo
Terneuzen
Roermond
Heerlen
Maastricht

Judith moet op de kaart uitzoeken waar Dick heengegaan kan zijn. Hieronder twee versies van het werkblad dat haar moet helpen.
Bezwaar tegen de oude versie: er wordt alleen getraind hoe men van een afstand op de kaart over kan gaan op een werkelijke afstand, terwijl juist de omgekeerde bewerking hier van belang is.
Verder is een te moeilijke zinsconstructie: 'de door Dick minimaal afgelegde afstand is bij deze schaal'.

Werkblad oude versie

Ons eerste probleem is nu bijna opgelost want van de tocht van Dick is nu bekend

- **de plaats van vertrek** (Hilversum)
- **de afgelegde afstand** (minimum en maximum)
- **de mogelijke plaatsen van aankomst** (zwarte stippen op het kaartje)

We kijken nog eens naar het kaartje van Nederland.
Het is getekend op schaal 1 : 1 500 000. Dat betekent

1 cm op de kaart is in werkelijkheid [cm].

en dat is [km].

De door Dick minimaal afgelegde afstand is bij deze schaal [cm].

De door Dick maximaal afgelegde afstand is bij deze schaal [cm].

Gereviseerd werkblad

We zoeken nu uit hoe groot deze afstanden op het kaartje zijn, dat bij de brief zat.
Kijk nu eerst naar dat *kaartje van Nederland.*

Let goed op de *schaal.*
De schaal van deze kaart is 1 : 1.500.000.
1 cm op de kaart is in werkelijkheid [cm] of [km].
30 km in werkelijkheid is op deze kaart [cm].
75 km in werkelijkheid is op deze kaart [cm].

Wat weten we nu?

We weten dat alleen de *zwarte* stippen van de kaart gelden.
We weten dat Dick vanuit *Hilversum* vertrekt.
We weten *hoeveel km* Dick minstens en hoeveel km hij hoogstens rijdt.
We weten de *schaal* van deze kaart.

We kunnen nu uitzoeken hoe groot de afstand die Dick minstens en hoogstens heeft afgelegd op het kaartje is.
Dick heeft minstens afgelegd [cm.]
Dick heeft hoogstens afgelegd [cm.]

Vermoedelijk wilt u graag weten hoe dit onderdeel van het project afloopt. Met behulp van twee cirkels op de kaart maken de leerlingen een lijst van de mogelijke vakantieadressen van Dick.
Fietswegen zijn niet recht. Dit geeft aanleiding tot enkele correcties van de lijst. Om de plaats eenduidig vast te leggen, deelt Dick mee:
1 of zijn vakantieplaats meer dan 100 000 inwoners heeft;
2 of hij aan een Europaweg ligt;
3 of hij aan een grote rivier ligt;
4 of hij per spoor uit meer dan twee richtingen bereikbaar is;
5 of een enkele reis tweede klas erheen vanuit Hilversum meer dan *f* 10,– kost.
De leerlingen zoeken uit door middel van tabellen en kaartjes of de gevonden plaatsen wel of niet deze eigenschappen hebben. Ze knippen vijf gaten in ponskaarten al of niet open, al naarmate de plaats wel of niet de corresponderende eigenschap heeft. Daarna worden de gegevens van Dick openbaar gemaakt. De ponskaarten wijzen uit, dat Dick naar Apeldoorn gegaan is.
Het verhaal is hiermee nog lang niet uit, maar de rest valt buiten het kader van dit verslag.

2 *Greep op kans* (GOK). De bedoeling van dit pakket is leerlingen te doen beseffen, wat kans is en wat in de praktijk het belang van kansen is.
Het is bestemd voor leerlingen van de brugklasse. In een oude versie van GOK lees ik:
Jos wil gaan dammen, maar René wil liever voetballen.
Jos zegt: 'Laten we eens uit het raam kijken. Als het verkeerslicht op groen staat gaan we dammen; als het rood is gaan we voetballen.
Eerlijk of niet eerlijk?
Deze (ogenschijnlijk?) meesterlijke vondst illustreert de bedoeling van de auteurs.
Hieronder een nadere uitwerking van hetzelfde idee.

Werkblad twee munten

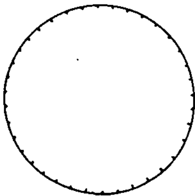
Ad, Ed en Ot willen een onderlinge tafeltenniscompetitie houden. Alle drie willen ze wel het eerste partijtje spelen. Daarom tossen ze er om wie het eerst moet toekijken.
Een van hen werpt twee munten op.
De afspraak die ze vooraf gemaakt hebben is:
– Ad is het eerst "vrij" als er bij beide geldstukken *kop* boven komt.
– Ed is het eerst "vrij" als er één *kop* (en één *munt*) wordt geworpen.
– Ot is het eerst vrij als er géén *kop* wordt gegooid (2 *munt*).

Vind jij dit een eerlijke manier van tossen?

Om een idee te krijgen of deze manier eerlijk is, gaan wij dit even naspelen in 10 groepjes; elk groepje werpt 50 keer. Noteer alle resultaten in onderstaande tabel.

WORP	turven	AANTAL
2 kop		
1 kop		
0 kop		
	totaal	50

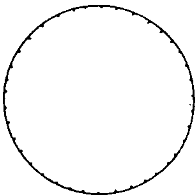
Van de verdeling van deze 50 worpen in aantallen
"2 kop"
"1 kop"
"0 kop"
maken wij een *sectorgram*



Wie van de drie denk je dat de meeste kans heeft om de eerste maal niet te mogen spelen?
En hoe groot schat je die kans? ...%

Hieronder noteren we de resultaten van alle tien groepen en tellen de scores op

WORP	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	samen
2 kop											
1 kop											
0 kop											
										totaal	



Maak van de verdeling van deze 500 worpen in aantallen 2 kop, 1 kop, 0 kop weer een sectorgram.

Hoe groot schat je de kans dat Ed het eerst niet mag spelen? ______ %

Toelichting
Er zijn twee soorten kansen:

a kansen waarvan je de grootte van te voren kunt weten (de auteurs noemen dit een *weetkans*);
b kansen waarbij je moet proberen er iets van te weten te komen (eerst *zweetkans*, later *probeerkans* genoemd).

In het onderhavige geval dreigt men fouten te maken met de weetkans. Het experiment wordt ingeschakeld om via de probeerkans uitsluitsel te verkrijgen.

De drie kansen blijken niet gelijk te zijn. De manier van tossen is dus niet eerlijk.
Nu de reacties van de leerlingen. De tien resultaten van de groepen lopen nogal uiteen. De leerlingen krijgen geen vertrouwen in de experimentele kansbepaling. De 500 worpen samen wijzen duidelijker op een verdeling $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. Maar dit is niet voldoende om het geschokte vertrouwen te herstellen.
Ook de terugkoppeling van kans naar werkelijkheid wil niet lukken. 'Het kan best zijn dat Ot *toch* gaat spelen; ook als je het vaker probeert kan het best zijn dat Ot *wel* mag spelen.'
Twee omstandigheden werken hier blokkerend:
a De experimentele kansbepaling is niet erg vertrouwenwekkend. Wie garandeert je dat je zo de echte kans vindt? Je vindt telkens iets anders.
b Stoort de werkelijkheid zich aan deze kansen? Al heeft iets een kleine kans, dan kan het toch best gebeuren. Of, zoals de auteurs het formuleren: de leerlingen onderscheiden niet duidelijk tussen kans en toeval.
Dan is er nog een derde punt.
c De leerling heeft de term 'kans' reeds vaak zien gebruiken. 'Bij Veronica krijg ik een eerlijke kans.' 'Weinig kans op loonmaatregel.' De vage notie die de leerling zo reeds van 'kans' heeft gekregen, blokkeert het verkrijgen van het gewenste inzicht.
Het doel kans te laten functioneren in de belevingswereld van de leerling, wordt daardoor niet bereikt.
Men achtte de emotionele blokkeringen dermate wezenlijk, dat men niet gezocht heeft naar een andere opbouw van GOK.
Graag wil ik hier een subjectieve conclusie aan vastknopen. GOK is bijzonder fraai en met grote kundigheid samengesteld. Desondanks is het wezenlijke doel, de leerling het kansbegrip te laten beleven, niet bereikt. Het centraal stellen van de probeerkans bleek grotere gevaren in te houden dan vermoed werd. De auteurs geven ruiterlijk toe, dat hun streven niet met succes bekroond is. Ik apprecieer hun eerlijkheid erg. Voor ons leraren is het van belang hiervan kennis te nemen. Het kan ons helpen bij onze eigen pogingen leerlingen het kansbegrip bij te brengen.

3 *Belvia.* Men wil een bungalowpark bouwen met T-vormige huisjes die samengesteld zijn uit vier kubussen. Dit geeft aanleiding tot allerlei problemen:
a het lezen van een plattegrond;
b het tekenen van voor-, achter- en zijgevels;
c het maken van een maquette op schaal;
d het onderzoeken wat voor huizen men met vier kubussen kan bouwen;
e het ontwerpen van verschillende netwerken van een kubus en het nagaan of een bepaalde figuur netwerk van een kubus is;
f het maken van een bouwbegroting met behulp van voldoende tecchnische gegevens;
g het opmeten van kavels waarop de huisjes gezet moeten worden.
Ik hoop dat uw nieuwsgierigheid hiermee voldoende geprikkeld is om zelf van het pakket kennis te nemen. Ik bepaal me tot een tweetal vallen-en-opstaan problemen.

Men wil richtlijnen geven volgens welke met vier kubussen een huis gebouwd wordt. De richtlijnen zijn:
men mag de kubussen stapelen, maar het hoeft niet;
als twee kubussen meer gemeen hebben dan een ribbe, hebben ze een volledig zijvlak gemeen;
de kubussen moeten een samenhangend geheel vormen, d.w.z. men moet vanuit elke kubus elke andere kunnen bereiken door uitsluitend zijvlakken in inwendige punten te passeren.
Over de derde eis maken de auteurs zich geen zorgen; ze zijn terecht van mening dat deze in de term 'huis' reeds vervat is.
Hierna volgen vier opvolgende versies waarin geprobeerd is de eerste twee eisen correct en tevens begrijpelijk weer te geven. De vierde stamt uit 'Bouwwerk', de opvolger van Belvia.

Belvia	nulde versie	B-1

VIER-KUBUS-HUISJES

Door vier kubussen op of naast elkaar te stapelen zó dat ze minstens één zijvlak tegen elkaar hebben, kun je iets bouwen.
Zo'n gebouw noemen we een *vier-kubus-huisje*.

BOUWEN MET KUBUSSEN	eerste versie	B-1

Door vier kubussen op of naast elkaar te stapelen zó dat ze met één, twee of drie zijvlakken tegen elkaar rusten, kun je iets bouwen.
Zo'n gebouw noemen we een *vier-kubus-huis*.

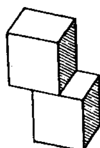
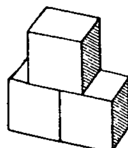
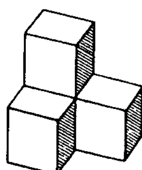
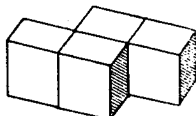
BOUWEN MET KUBUSSEN	tweede versie	B-1

Door vier kubussen op of naast elkaar te stapelen zó dat elke kubus met één, twee of drie zijvlakken tegen een andere kubus rust, kun je iets bouwen. Zo'n bouwsel noemen we een *vier-kubus-huis*.

Met kubussen kun je ook bouwwerken maken.
We spreken af:

> De kubussen moeten met een heel zijvlak tegen elkaar of op elkaar gezet worden.

Dus:

FOUT GOED

Hoe bepalen we de oppervlakte van een gebied dat niet (alleen) door rechte lijnen begrensd wordt?
Dit probleem komt zowel voor in Wiskunde in de brugklas als in Belvia. Ik ga eerst terug naar Wiskunde in de brugklas.
Judith zit ergens bij de Friese meren en Dick moet haar zoeken. Ze zit bij een van de drie meren, maar niet bij het grootste en ook niet bij het kleinste. De oppervlakten van de meren moeten dus vergeleken worden. De leerlingen hebben een kaartje van de meren, een doorzichtig rooster met mazen van 1 cm en één met mazen van $\frac{1}{2}$ cm. Op blz. 54 staat een voorbeeld om ze een manier te leren zich eruit te redden. Het lukt niet. De leerlingen hebben vooral moeite met de overdekking en begrijpen niet waarom ze hokjes helemaal moeten tellen die maar ten dele tot het meer behoren. Aan het fijne rooster komen ze niet toe.
In de revisie is het voorbeeld weggelaten. De leerlingen krijgen het kaartje van de meren en de twee roosters en moeten zelf een strategie ontwikkelen. Dat gaat veel beter. Ze tellen de hokjes heel, half of helemaal niet en komen zo tot een aardige benadering. Desgewenst kunnen ze de oppervlakten van de meren niet alleen vergelijken, maar ook uitrekenen. Noodzakelijk is dit niet.
Het begrijpen van een voorgedane strategie gaat hier stroever dan het ontwerpen van een strategie. Op het eerste gezicht wekt dit verwondering. Bij nader inzien is het toch wel begrijpelijk.

Werkblad oude versie

binnenoppervlakte 720 ha

AALMEER
1 : 60 000

We hebben nu geprobeerd het meetrooster zo neer te leggen, dat **zo veel mogelijk** van die **vierkanten binnen de omtrek** liggen.
We tellen 20 hele vierkanten, dat is in werkelijkheid 720 ha.
Dat noemen we de **binnenoppervlakte**.

Ook onderzoeken we hoe we, met zo **weinig mogelijk vierkanten**, het meer kunnen **overdekken**.

Aantal vierkanten [ ]

Dat is in werkelijkheid [ ] ha

Dat noemen we de **overdekking**.

overdekking [ ] ha

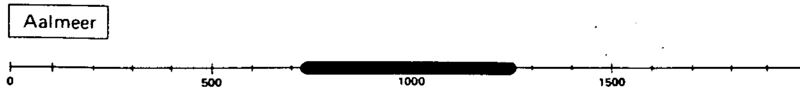
AALMEER
1 : 60 000

We weten nu al iets meer van de oppervlakte van het Aalmeer:

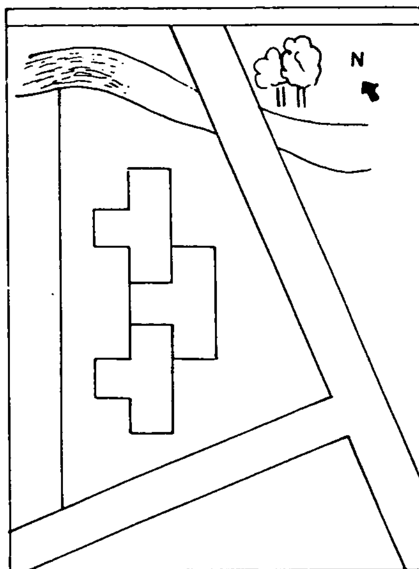
die is groter dan [ ] ha en kleiner dan [ ] ha

Op de getallenlijn ziet dat er zo uit:

Aalmeer



Nu Belvia. Hieronder een perceel waarop drie huizen gebouwd zijn. De leerlingen hebben het probleem al achter de rug de grootte van een dergelijk perceel te bepalen. Ze moeten nu het perceel zo verdelen, dat bij elk huis evenveel grond hoort. En daarna zo nauwkeurig mogelijk de grootte van de drie stukken bepalen.



Ook hier was vereenvoudiging van het probleem doelmatig. In de volgende versie werd het aantal huizen op het perceel van drie op twee teruggebracht.
Uit de verslagen blijkt dat de leerlingen met het begrip oppervlakte veel groter moeilijkheden hebben dan men oppervlakkig zou vermoeden. Velen blijven in eerste instantie steken bij: oppervlakte = lengte maal breedte.

Ik heb bij het voorgaande onevenredig lang stilgestaan, omdat ik het een aardige gelegenheid vond de lezer iets te vertellen, dat voor hem uit didactisch oogpunt boeiend kan zijn. De beschreven pakketten behoren tot de oudere van het IOWO en zijn niet alle nog verkrijgbaar.

4 *Verpakkingen.* Dit pakket wordt in extenso beschreven vanuit vier gezichtspunten: de leerdoelen, het leerlingenmateriaal (het leerstofpakket), de ervaringen in de klas en de aanwijzingen voor de docent.
Het leerdoel is de leerling vertrouwd te maken met ruimtelijke figuren. In de huidige schoolboeken geschiedt dit vaak slechts summier aan de hand van een korte beschrijving en een afbeelding van enkele lichamen. De bedoeling van dit pakket is, dat de leerling zich de structuur van ruimtefiguren eigen maakt door er in concreto mee te manipuleren.
Ze moeten daartoe eerst zelf een veelheid verpakkingen meebrengen: doosjes, flessen, jampotten enz. Ze ontwerpen een indeling in soorten. Daarna krijgen ze een modellenblad waarop afgebeeld staan een kubus, een balk, een prisma, een

piramide, een cilinder, een kegel, een afgeknotte kegel en een bol. Door vergelijking moeten ze, voorzover mogelijk, de meegebrachte objecten volgens deze voorbeelden rubriceren.
Daarna concentreren ze zich op de begrenzing van de voorwerpen. Ze leren platte en gebogen grensvlakken onderscheiden. De platte grensvlakken worden onderscheiden in driehoeken, vierhoeken, ... Vanzelf komen zo ook ribbe en hoekpunt aan de orde.
De leerlingen moeten proberen de ruimtefiguren te tekenen. Dat dit geen eenvoudige opgave is, is duidelijk en de resultaten zijn vaak nog zeer gebrekkig.
Andere manieren om inzicht in de ruimtefiguren te krijgen zijn het maken van een netwerk en de omgekeerde bewerking daarvan: het in elkaar zetten van de ruimtefiguur als daarvan een bouwplaat gegeven is. Ook van cilinder en kegel wordt een netwerk (uitslag) gemaakt.
Tot slot nog een uitvoerige toets waarin de leerling kan laten zien in hoeverre hij de inhoud van dit pakket heeft kunnen verwerken.

5 *De invloed van het werk van het IOWO.* Wat heeft men aan deze leerpakketten? wat is ermee gedaan?
In de eerste plaats zijn ze gebruikt op experimenteerscholen.
Het meest intensief is het contact geweest tussen de werkers aan het IOWO en de docenten van de mavo-leao school 'Lunetten' (vroeger gelegen aan de Gansstraat). Daarnaast is de volledige pakketserie gebruikt aan de lts Nijverdal en de middenschool Heythuysen.
Aan sommige scholen hebben de pakketten gediend als stimulans voor modernisering van het wiskunde-onderwijs. Naar aanleiding ervan heeft men zelf materiaal ontworpen. Met name moeten hier genoemd worden het Wagenings lyceum en het Ignatius college te Purmerend. Verder heeft het materiaal stimulerend gewerkt op individuele leraren en ook op auteurs bij het schrijven van schoolboeken.

6 *De didactische uitgangspunten van de Wiskivonpakketjes.* Wat wil men met dit materiaal bereiken? Als belangrijkste doel wordt vermeld: het geven van probleemgericht onderwijs en daarbij aansluiten op de belevingswereld van de kinderen.
Verder als nevendoelen: verlevendigen van het onderwijs, verhogen van de motivatie, een bijdrage leveren om vakkenintegratie te bevorderen.
Hoe men deze doelen poogt te bereiken, wordt uiteengezet aan de hand van voorbeelden uit de 21 pakketjes van Wiskivon. Daarbij komen verschillende facetten aan de orde die ik hier kort wil belichten.

De keuze van de onderwerpen

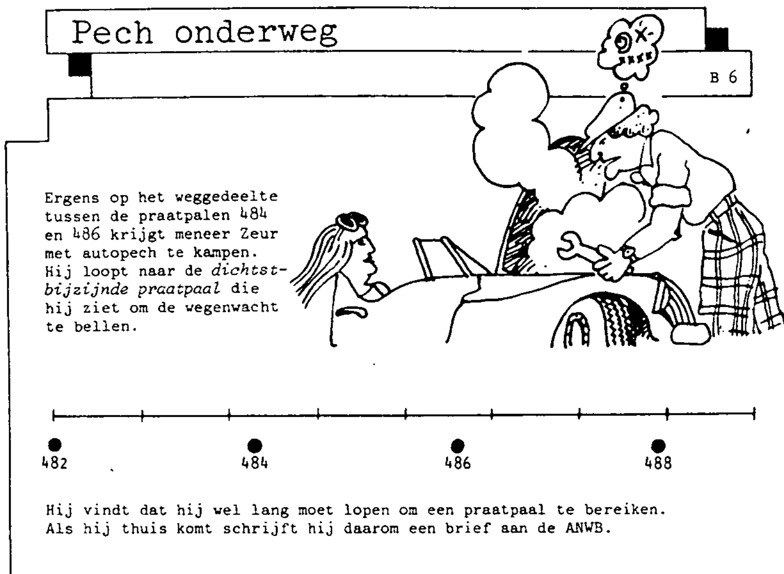
1.1 *Gekozen is voor die wiskunde onderwerpen die helpen het alledaagse te verklaren.*
Voorbeelden. Een lantaren belicht een serie paaltjes. Teken de schaduwen en vergelijk hun lengten. Evenwijdige rails lijken naar elkaar toe te lopen. Hoe komt dat? In een trein vliegen bomen die dichtbij staan, snel aan ons voorbij; bomen in de verte niet. De maan 'loopt met ons mee'. Hoe verklaar je dat?

1.2 *Gekozen is voor wiskunde onderwerpen die 'iedere Nederlander eigenlijk zou moeten weten'.*
Denk om te beginnen aan Greep op kans. Het hoekbegrip leren we begrijpen door een papier herhaaldelijk te vouwen waarbij de vouwen telkens door hetzelfde punt gaan. Maak een tabel van het gewicht van Joost. Verwerk de gegevens in een grafiek en ga nu na wat er met Joost gebeurd is. Wanneer was hij ziek?

1.3 *Gekozen is voor onderwerpen die in het vigerende onderwijs vaak onvoldoende helder worden aangebracht.*
Bekende voorbeelden zijn breuken en procenten. Door deze begrippen op verschillende manieren te visualiseren, wordt de leerling ermee vertrouwd gemaakt en krijgen de rekenregels tastbare achtergrond.

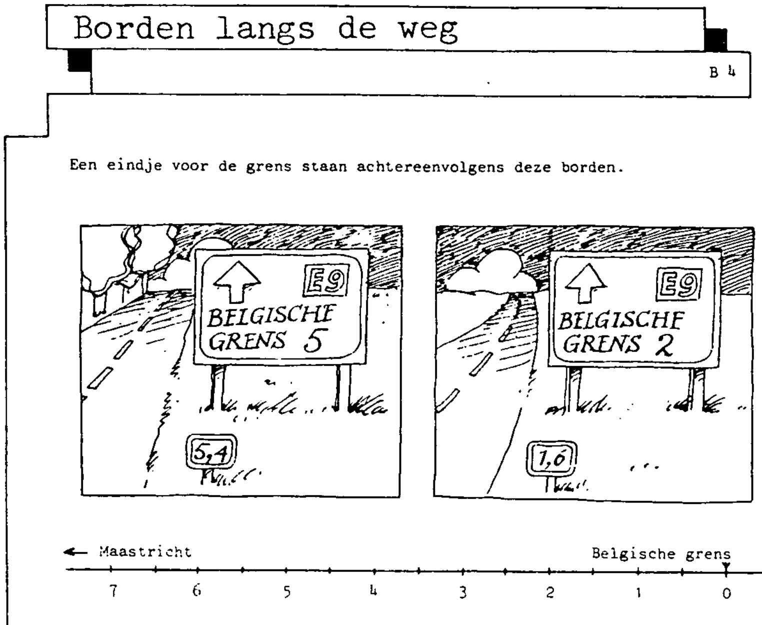
Enkele didactische uitgangspunten

2.1 *Het gebruik van context.* Een wiskunde probleem wordt vaak ingeleid door een verhaal. Het wordt als als het ware verpakt in een context. Een voorbeeld uit het pakket Autowegen.



En dan volgt de brief van de heer Zeur te Mopperdam.

In een ander voorbeeld, eveneens uit Autowegen, is de context niet van verbale, maar van visuele aard.



De vraag waar het om gaat, is: hoe ver staan deze borden van elkaar? De leerling ziet de invloed en de betekenis van afronden.
Een onderwerp dat zich uitstekend leert voor het aanbrengen van kennis door middel van een verhaal, is De reis om de wereld in 80 dagen. Van dit pakket is inmiddels een definitieve uitgave verschenen in boekvorm.

2.2 *Konkreet handelen.* De leerling verkrijgt inzicht door het verrichten van konkrete handelingen. Een treffend voorbeeld hiervan vindt men in het hierboven beschreven pakket Verpakkingen.

2.3 *Onderzoekend leren.* De leerling krijgt geen problemen voorgeschoteld, vaak met als voorbeeld de oplossing er al bij. Integendeel, hij wordt met een probleem in aanraking gebracht en er dan toe gebracht het min of meer zelfstandig op te lossen. Men begint niet direct met het einddoel, maar start met een instapprobleem.
Op de volgende bladzijden staat een voorbeeld hiervan uit Procenten.

Wie heeft gelijk?

2

Nelleke en Arjen hebben verschil van mening.
Wat is namelijk het geval?
De brugklassen B en D hebben samen een sportmiddag gehouden. Bij het hoogspringen ging het erom hoeveel leerlingen over de 1.10 meter kwamen.
Van de klas van Nelleke (klas B) haalden *13 van de 20* leerlingen deze hoogte. Van de klas van Arjen (klas D) haalden *17 van de 25* leerlingen de 1.10 meter.
Nelleke vindt dat haar klas beter springt dan die van Arjen; Arjen vindt dat zijn klas beter is in het hoogspringen.

Wie heeft gelijk, denk je? ____________________

Waarom? ____________________

En dan de slotvraag:
Wat hoop je met je onderwijs nu eigenlijk te bereiken?
En het antwoord:
We hopen bij de leerlingen een wiskundige attitude te bereiken zo dat als dat nodig is, zij hun wiskunde weten te gebruiken in de hun omringende realiteit.

7 Deel 2b gaat over de relaties tussen het IOWO en de nlo (nieuwe leraarsopleiding).
De IOWO-pakketten onderscheiden zich van de klassieke methode niet alleen door andersoortige leerinhoud, maar ook door een geheel andere didactische aanpak.
Veel pakketten zijn alleen goed uitvoerbaar, als tot groepswerk overgegaan wordt. Vragen aan een enkele leerling gesteld moeten zo voorbereid en geredigeerd worden, dat de meeste leerlingen er iets mee kunnen doen. Een groep behoeft men minder aan het handje te nemen. De vraag kan men daardoor zo stellen, dat een probleem door de groep aangesneden kan worden en dat de groep er iets aan te kluiven heeft. Niet alleen de geestelijke activiteit wordt in gang gezet, maar de ondersteuning daarvan door manuale activiteit wordt ook van essentieel belang geacht. De vragen zijn zo gesteld, dat de leerling niet als het ware voorgeprogrammeerd wordt, maar dat de groep binnen zekere grenzen zelf kan beslissen welke weg ze wil inslaan om tot een oplossing te komen. Het komt voor dat de vragen zo geformuleerd worden dat een zekere speelruimte in de interpretatie ervan overblijft, zodat het antwoord op de vraag van deze interpretatie afhangt. Volgens de klassieke opvatting is dan de vraag niet juist gesteld. (En hier heb ik de neiging me aan de zijde van de klassieke opvatting te scharen.)
Het spreekt haast vanzelf dat lessen met IOWO-materiaal vruchtbare bronnen zijn voor didactisch onderzoek. Lesvoorbereiding en begeleiding van de groepen vereisen grote zorg. Door de groepen gade te slaan krijgt men een goed inzicht in verschillende facetten van het leerproces.
Vandaar de grote belangstelling van de nlo voor de inhoud van de IOWO-pakketten en het werken ermee. Zowel bij didactische beschouwingen binnen het instituut als bij het schoolpracticum spelen ze een belangrijke rol.

In deel 2b wordt hiervan uitvoerig verslag gegeven. Het verslag is ietwat kaleidoskopisch.

Een ongewild neveneffect van de brochure is, dat hij ook nog stimulerend gewerkt heeft op uw puzzelredacteur. Elders in dit tijdschrift vindt u het resultaat.

De prijs van deze brochures is
deel 2a *f* 15,–
deel 2b *f* 10,–
U kunt ze bestellen bij de vakgroep OW & OC van de subfaculteit wiskunde van de universiteit Utrecht.

Dit was een laatste hommage van de zijde van de redactie van Euclides aan het IOWO en zijn medewerkers, met dank voor het vele en voortreffelijke werk dat door hen verricht is.

Controversen in de ontwikkeling van de kanstheorie

JEF L. TEUGELS

1 Bedenkingen bij de ontwikkeling van de kanstheorie

De kanstheorie als wiskundige wetenschap heeft een nogal onduidelijke oorsprong en ontwikkeling gekend. Meerdere verklaringen zijn daarvoor vooropgesteld en we geven er enkele aan.

In zijn historische schets van de kanstheorie geeft L. E. Maistrov een reeks *economische oorzaken* aan voor de ontwikkeling van deze wetenschap. Zo was het opstellen van tabellen voor de verzekering van de verwachte levensduur belangrijk voor de verzekeraars; ook waren statistieken belangrijk voor de heersers om te voorzien in hun eigen onderhoud en dat van hun troepen. De handel heeft ook een sterke invloed gehad op statistische verzekeringen.

Deze visie is goed uitgewerkt in het boek van Maistrov [6], die uitgaat van een dialectisch-materialistische visie op de ontwikkeling van de wetenschap. Het is echter betwijfelbaar dat economische motieven zo'n exclusief belang hebben gehad mede omwille van het beperkt aantal economisch gerichte vraagstukken dat de kanstheorie toen kon oplossen.

Een andere en populairdere visie op de ontwikkeling van de kanstheorie komt uit de hoek van de *kansspelen*. Klassiek is het verhaal over de Chevalier De Méré (1607-1684) die Pascal (1623-1662) vroeg de kans te berekenen om in vier worpen met een dobbelsteen tenminste één zes te gooien. Ook wordt De Méré – hoewel een bekende in wetenschappelijke en aristocratische kringen – vaak voorgesteld als een verwoed gokker. Romantische verhalen slaan nu eenmaal beter in dan de historische werkelijkheid.

Zoals we verderop aangeven waren echter al veel vroeger analoge problemen in verband met geluksspelen besproken door de wetenschapsmensen. Vele voorbeelden zijn bekend waarbij het kanselement gebruikt werd zonder echter aanleiding te geven tot wetenschappelijke vraagstelling. Een weinig bekend voorbeeld komt uit de muziek. Tot het einde van de 18e eeuw maakten toondichters (waaronder bijvoorbeeld Mozart) muziekwerkjes opgebouwd uit korte sequensen die lukraak door elkaar gegooid konden worden om meer variatie toe te laten aan de uitvoerders.

Ons inziens is een belangrijke stap in de ontwikkeling van de kanstheorie gekomen uit de wens van de verlichte mens om de achtergrond te kennen van de wetmatigheid in de wereld die hem omgaf. De *desacralisering* van deze verschijnselen kan in de kanstheorie een rol hebben gespeeld die analoog is aan de overgang van het Ptolemeïsche naar het Copernicaanse beeld van het zonnestelsel.

In de geschiedenis zijn een aantal prachtige voorbeelden aan te halen van situaties waar kanselementen gebruikt worden om de wil van de god(en) te leren kennen. In de bijbel vinden we een beschrijving hoe vier boogschutters met de rug naar elkaar een pijl moeten afschieten om de te volgen weg te bepalen. We denken ook aan de interpretaties die de sterrenwichelaars gaven van de stand van de planeten, de vlucht van de vogels, het gooien van astragali (bikkels) enzomeer.

Er bestaan mooie teksten over de ontwikkeling van de kanstheorie. Vooral het boek van Maistrov en dat van F. N. David [1] bevatten plezierige lectuur terzake. Ook [5, 6, 7, 8].

2 Enkele moeilijkheden in de ontwikkeling

Aan de hand van enige concrete voorbeelden zullen we aangeven hoe in de ontwikkeling van de kanstheorie bepaalde kernproblemen werden opgevat.

a Het verdelen van de inzet

In een werk van Franciscus Van Schooten, uitgegeven in 1660, vinden we een bijdrage van de hand van Christianus Huygens (1629-1695) over *Van Reckeninghe in Speelen van Geluck*. Hierin behandelt hij o.a. het volgende vraagstuk dat we een beetje abstraheren.
'Onderstel dat twee spelers A en B na een gelijke inzet te hebben gegeven het tegen elkaar opnemen in een eerlijk spel. Ze komen overeen dat wie het eerst S ronden gewonnen heeft de totale inzet krijgt. Het spel wordt echter afgebroken op het ogenblik dat A nog maar p spelen gewonnen heeft en speler B slechts q ($q < p < S$). Hoe moet de inzet redelijkerwijze worden verdeeld?'
Dit probleem van het *verdelen van de inzet* heeft een lange geschiedenis achter de rug; er zijn zelfs verwijzingen naar Hindoegeschriften.

- Ook Cardano (1501-1576) besprak het probleem in 1539. Hij gaf als zijn oplossing de verhouding
  $$1 + 2 + \dots + (S - q) : 1 + 2 + \dots + (S - p)$$
  die reeds van S afhangt.

- Tartaglia (± 1499-1557) gaf als formule in 1556

$$1 + \frac{p - q}{S} : 1 - \frac{p - q}{S}$$

zodat wie leidt in het spel een surplus krijgt overeenkomstig zijn voorsprong maar omgekeerd evenredig met het aantal te spelen rondjes S.

- De eerste (naar huidig inzicht) juiste oplossing komt van Fermat (1601-1665) in een brief van 1654 aan Pascal (1623-1662).
  Fermat redeneert als volgt: de overeenkomst was om S rondjes te spelen; dus moet de inzet verdeeld worden a rato van de winstkansen van de twee spelers in de veronderstelling dat het spel wordt uitgespeeld.
  Stellen we S = 6, p = 5 en q = 3, dan zijn er hoogstens nog 3 spelen te spelen, die de volgende uitslag kunnen geven (we schrijven + voor winst voor A, – voor winst voor B)

1e ronde	+	+	+	–	+	–	–	–
2e ronde	+	+	–	+	–	+	–	–
3e ronde	+	–	+	+	–	–	+	–
winnaar	A	A	A	A	A	A	A	B

De verhouding is dus 7 : 1 daar A in zeven van de acht gevallen als winnaar uit de bus zal komen.

Pascal en Huygens hebben het probleem ook opgelost op dezelfde manier. In de heden gebruikelijke notaties zal die verhouding kunnen opgeschreven worden als

$$\binom{2S-p-q-1}{0}+\binom{2S-p-q-1}{1}+ \\ +\ldots+\binom{2S-p-q-1}{S-q-1}:\binom{2S-p-q-1}{0}+ \\ +\binom{2S-p-q-1}{1}+\ldots+\binom{2S-p-q-1}{S-p-1}.$$

We merken op dat voor S = 6, p = 5, q = 3 we de volgende verhoudingen hebben zien opduiken:

Paccioli: $\frac{5}{3}$; Cardano: $\frac{6}{1}$; Tartaglia: $\frac{2}{1}$; Fermat; $\frac{7}{1}$.

Bespreking
De verschillen in deze uitkomsten zijn enorm. Ze kunnen allicht mede verklaard worden door de moeilijkheid van het gestelde vraagstuk, het aangenomen uitgangspunt en de onmogelijkheid de gevonden oplossing in de praktijk te controleren.

b Het standpunt van D'Alembert

Jean D'Alembert (1717-1783) was met Diderot de samensteller van de beroemde

Encyclopédie. Onder het hoofd 'Croix ou pile' in het vierde deel (1757) behandelt hij twee problemen.

Probleem 1: 'Gooi een muntstuk tweemaal. Wat is de kans om twee keer munt te hebben?'

D'Alemberts oplossing loopt als volgt:

1e worp	2e worp
Kruis	Niet meer nodig
Munt	Kruis
Munt	Munt

Daar van de drie mogelijkheden er slechts één gunstig is, is de gevraagde kans 1/3.
We merken hierbij op dat D'Alembert niet het voorgenomen experiment (gooi tweemaal) uitvoert, doch stopt als hij de eerste keer kruis krijgt. Als men het experiment helemaal uitvoert, krijgt men

1e worp	2e worp
Kruis	Kruis
Kruis	Munt
Munt	Kruis
Munt	Munt

De kans wordt dan klaarblijkelijk 1/4.

Probleem 2: 'Gooi een muntstuk driemaal. Wat is de kans om minstens één keer munt te hebben?'
Weer redeneert D'Alembert als volgt

1e worp	2e worp	3e worp
Munt	Niet nodig	Niet nodig
Kruis	Munt	Niet nodig
Kruis	Kruis	Munt
Kruis	Kruis	Kruis

Hieruit volgt dat de kans 3/4 is. De lezer kan nagaan dat het volledig uitgevoerde experiment de correcte kans 7/8 oplevert.
Ondanks openlijke kritiek op de door D'Alembert voorgestelde oplossingen houdt deze ze staande zeggend dat hoe meer hij er over nadenkt hoe beter hij ze vindt. De door D'Alembert gemaakte redeneerfout wordt ook nu nog herhaaldelijk teruggevonden.

Bespreking

Op het ogenblik van de uitgave van de *Encyclopédie* (1757) was de wet van de grote aantallen door Jakob Bernoulli (1634-1705) bewezen in de bekende *Ars Conjectandi* van 1713. Deze wet zegt dat als men het experiment maar voldoende vaak herhaalt onder identieke omstandigheden de kans van een gebeurtenis door de relatieve frekwentie ervan tijdens deze herhalingen, zo dicht kan benaderd worden als men maar wil. Hieruit mag men besluiten dat D'Alembert de onjuistheid van zijn oplossing had kunnen inzien door experimentele verificatie.

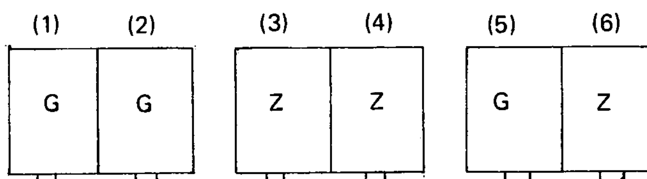
Het is bekend dat het gebruik van het experiment ter evaluatie van een vooropgesteld wiskundig model in de 18e eeuw een totaal ander karakter had dan wat wij er nu aan geven: heden ten dage wordt een model immers maar aanvaardbaar genoemd als en zolang als het door het experiment wordt bevestigd.

Het lijkt ons een interessant studieobject om na te gaan hoe de houding van de wetenschapsmens tegenover het experiment geëvolueerd is in de loop der tijden. Immers een tijdgenoot van D'Alembert, nl. G. L. Buffon (1707-1788) heeft in 1777 experimentele waarnemingen gebruikt ter bepaling van de constante π. Zie hiervoor bijvoorbeeld [3].

c De paradoxen van Bertrand

In een bijdrage in Wiskunde en Onderwijs heeft P. Embrechts [2] aangegeven hoe door willekeur bij het beschrijven van een experiment een ogenschijnlijk duidelijk vraagstuk tot meerdere aanvaardbare oplossingen kan leiden. Vooral J. Bertrand (1822-1900) heeft in zijn *Calcul des probabilités* van 1889 hiervan mooie staaltjes gegeven, die dan als de *paradoxen van Bertrand* de geschiedenis zijn ingegaan.
Hier is een ander voorbeeld van de hand van dezelfde auteur.
'Drie gelijke dozen bevatten twee naast elkaar liggende schuifjes. In elk schuifje ligt een muntstuk van goud (G) of van zilver (Z) (tekening). Kies nu lukraak een doos en een schuifje en kijk naar het stuk in het gekozen schuifje. Wat is de kans dat het stuk in het tweede schuifje van die doos van hetzelfde materiaal is als het eerste stuk?'

Hier zijn de doosjes waarvan de inhoud op voorhand vastlag.



Bertrand redeneert als volgt: als het eerste stuk van goud is dan is het tweede ofwel van goud, ofwel van zilver; dus de gevraagde kans is 1/2. Is het eerste van zilver, dan ook. Dus de kans is 1/2. Dit antwoord is fout. Immers als het

gevonden stuk van goud is, dan hebben we schuifje (1), (2) of (5) gekozen. De mogelijkheden voor het tweede schuifje zijn dan respectievelijk (2), (1) en (6). Daar alleen (6) gunstig is, is de kans 1/3. Bertrand vindt 1/2 omdat hij onderstelt dat men weet welk schuifje (links of rechts) gekozen werd.

Bespreking
De moeilijkheden in Bertrands benadering – naast een achterwege blijven van een controlerend experiment – zijn zoals bij D'Alembert terug te brengen tot een foutieve vastlegging van alle mogelijke uitkomsten van het experiment dat verband houdt met de gebeurtenis waarvan de kans gevraagd werd.

d Een moeilijkheid in de rechtspraak

Sinds het begin van de jaren 50 was het de gewoonte bij de gerechtshoven in de Verenigde Staten statistische evidentie als bewijskrachtig aan te nemen. Op dit ogenblik is dit niet meer zo o.a. omwille van de affaire *People versus Collins.*

Op 18 juni 1964 werd een roofoverval gepleegd in Los Angeles. Het slachtoffer had kunnen waarnemen dat de dader een blond blank meisje was met een paardestaart. De dievegge vluchtte naar een aangrenzende straat waar een kleurling met baard en snor haar stond op te wachten in een gele wagen.

Vrij snel werd een koppel aangehouden (waarbij zij Janet Collins heette) dat beantwoordde aan de hierboven gegeven beschrijving. Tijdens de rechtszitting betoogde de openbare aanklager dat het koppel schuldig moest zijn op basis van statistische evidentie, daar een koppel met de gegeven kenmerken slechts éénmaal in twaalf miljoen voorkomt.

De cijfers kwamen uit de volgende tabel

interraciaal koppel in wagen	1/1000
meisje met paardestaart	1/10
blond meisje	1/3
kleurling met baard	1/10
man met snor	1/4
gele wagen	1/10

Als men de cijfers rechts vermenigvuldigt komt men op 1/12 000 000. De verdediging trok de gegeven cijfers in twijfel en berekende dat, als er één koppel was met de gegeven kenmerken in Los Angeles, er met kans 0,4 ook minstens een tweede moest zijn met dezelfde kenmerken. Het belangrijkste bezwaar kwam echter tegen de veronderstelling dat de gegeven kenmerken onafhankelijk waren zodat de cijfers werden vermenigvuldigd.
Deze hypothese van onafhankelijkheid is duidelijk betwijfelbaar daar kleurlingen erg gesteld zijn op witte en gele wagens en op blonde meisjes, dat baard en snor vaak samengaan enzomeer.
Het aanklaagde koppel werd vrijgesproken. Meer hierover in [4].

Bespreking
Voor de huidige generatie is het gestelde probleem even moeilijk als het verdelen van de inzet moeilijk was voor de 15e eeuw. De gegeven oplossing is trouwens niet minder 'amateuristisch' dan de oplossing van Paccioli voor het probleem in punt a behandeld.

3 Slotbeschouwingen

Uit de gegeven voorbeelden kunnen we afleiden dat het vastleggen van een juiste en exhaustieve uitkomstenverzameling hét uitgangspunt moet zijn voor een goede opbouw van een kansexperiment. Deze gedachtengang werd uiteindelijk maar volledig gevolgd door de Russische school van kansrekenaars en in het bijzonder door A. N. Kolmogorov rond 1930.

Deze geaxiomatiseerde vorm van de kanstheorie is nu volkomen aanvaard in kringen van beoefenaars van de kanstheorie. Voor een inleiding, zie [3].

We mogen besluiten dat er nog heel wat onbekenden zitten in de legpuzzel van de ontwikkeling van de kansrekening. Ook de kennis van de rol van het verifiërend controle-experiment is een merkwaardig hiaat.

4 Bedanking

Graag spreek ik mijn erkentelijkheid uit tegenover alle collegae en medewerkers van het departement wiskunde van de K.U. Leuven voor hun commentaar op de lezing die aanleiding was tot het schrijven van deze tekst.

Bibliografie

1 F. N. David, *Games, gods and gambling*, Ch. Griffin, London, 1962.
2 P. Embrechts, *Een paradox bij het berekenen van kansen*, Wisk. en Ond. 19 (1979), 27-34.
3 P. Embrechts, J. L. Teugels en N. Veraverbeke, *Kanstheorie en inleiding tot de statistiek*, Acco, Leuven, 1978.
4 W. B. Fairley and F. Mosteller, *Statistics and public policy*, Addison-Wesley, Reading, 1977.
5 I. Hacking, *The emergence of probability*, Cambridge University Press, London-New York, 1974.
6 L. E. Maistrov, *Probability theory: a historical sketch*, Academic Press, New York, 1974.
7 E. S. Pearson and M. G. Kendall, *Studies in the history of statistics and probability*, Ch. Griffin, London, 1970.
8 I. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability*, Cambridge University Press, London-New York, 1865.

Over de auteur:

Jef L. Teugels werd geboren in 1939. Hij studeerde wiskunde aan de Katholieke Universiteit Leuven, waar hij in 1963 licentiaat in de wiskunde werd. In 1966 behaalde hij zijn doctoraat aan de Amerikaanse Purdue University.
Hij is gewoon hoogleraar in de kanstheorie aan de Katholieke Universiteit Leuven.

De negende wiskunde-olympiade in de Verenigde Staten

De olympiade is gehouden op 6 mei 1980. Aantal deelnemers 120. Hieronder de opgaven.

1 A two-pan balance is inaccurate, since its balance arms are of different lengths and its pans are of different weights. Three objects of different weights A, B, and C are each weighed separately. When placed on the left-hand pan, they are balanced by weights A_1, B_1, and C_1, respectively. When A and B are placed on the right-hand pan, they are balanced by A_2 and B_2, respectively. Determine the true weight of C in terms of A_1, B_1, C_1, A_2, and B_2.

2 Determine the maximum number of different three-term arithmetic progressions that can be chosen from a sequence of n real numbers $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

3 Let

$$F_r = x^r \sin(rA) + y^r \sin(rB) + z^r \sin(rC),$$

where x, y, z, A, B, and C are real and $A + B + C$ is an integral multiple of π. Prove that if $F_1 = F_2 = 0$, then $F_r = 0$ for all positive integral r.

4 The inscribed sphere of a given tetrahedron touches each of the four faces of the tetrahedron at their respective centroids. Prove that the tetrahedron is regular.

5 If $1 \geqq a, b, c \geqq 0$, prove that

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqq 1.$$

Table 1 geeft een overzicht over de scores behaald voor de vijf opgaven afzonderlijk; table 2 over de totaalscores.

TABLE 1

Probleem	Score 0	1-5	6-10	11-15	16-20	21+
1	28	24	27	13	28	0
2	42	11	29	11	26	1
3	94	13	2	1	8	2
4	69	19	5	6	19	2
5	101	11	0	2	4	2

TABLE 2

Total Score	Number of Students
0	10
1-20	46
21-40	40
41-60	16
61-80	5
81-100	2
101+	1

Overgenomen uit The Mathematics Teacher van december 1980, vol. 73, nr. 9.

P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

441. Anton en Bennie moeten medespelers kiezen voor een partijtje voetbal. Ze gaan 'poten' om te bepalen wie de eerste keus heeft. Beurt voor beurt zetten ze hun voet recht of dwars vooruit. Wie de verbinding tot stand brengt, heeft de eerste keus.
Anton heeft grotere schoenen dan Bennie. Men vindt dit niet eerlijk. De een zegt dat Anton grotere kans heeft om te winnen, omdat hij gemakkelijker de verbinding tot stand brengt. De ander dat Bennie grotere kans heeft, omdat hij wat fijner kan manoeuvreren. Wie heeft gelijk? Neem de beginafstand relatief groot (meer dan 400).
Probeer bijv. eens met
schoenen van Anton 50 lang en 20 breed
schoenen van Bennie 25 lang en 10 breed
of met
schoenen van Anton 50 lang en 25 breed
schoenen van Bennie 40 lang en 16 breed.
De getallen zijn verhoudingsgetallen.
(naar Leerplanontwikkeling onderweg 2b, blz. 9)

442. Een kromme omsluit een deel van een roostervlak. De oppervlakte van het omsloten vlakdeel is O, het aantal roosterpunten dat binnen de begrenzing ligt, p. Tussen O en p is geen verband aan te wijzen. Maar als $O > n$ ($n \in \mathbb{N}$), dan is het mogelijk een zodanige translatie uit te voeren, dat het beeld van de begrenzende kromme minstens $n + 1$ roosterpunten omsluit.

Oplossingen

438. A en B domineren. Ze hebben beurtelings vrije keus een steen aan te leggen. Wie vastgezet wordt, voordat alle stenen verbruikt zijn, verliest. Wie wint bij optimale strategie?
We spreken af, dat we een nog niet verschenen aantal ogen steeds minimaal kiezen. Begint iemand dus met 5-5, zet de ander 5-3 aan en de een daarna 3-0, dan wijzigen we dit in 0-0, 0-1, 1-2 en vervangen dus de 5, 3 en 0 door resp. 0, 1 en 2.
We gaan nu als volgt te werk.

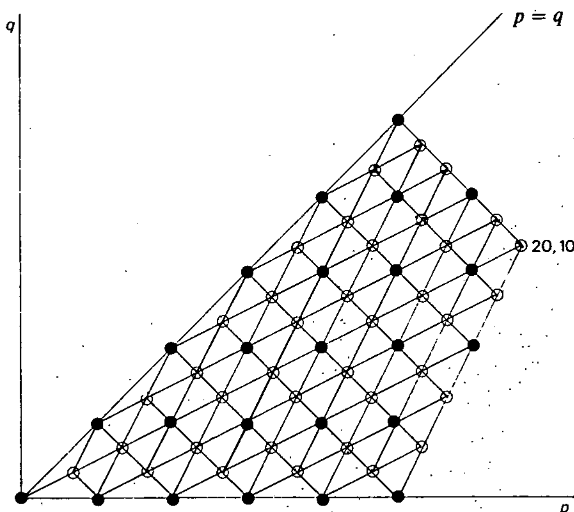
A	*B*
0-0	0-1 (*volgens de gemaakte afspraak*)
1-1	2-0 (*of* 1-2)
1-2	1-3
3-0	0-4 (*of* 4-1)
4-1	1-5
5-0	0-6 (*of* 6-1)
6-1	*verliest*

De stenen worden daarbij op onderstaande manier aangelegd:

1-2, 2-0, 0-0, 0-1, 1-1, 1-3, 3-0, 0-4, 4-1, 1-5, 5-0, 0-6, 6-1.

Men kan gemakkelijk inzien, dat de nevenkeuzen voor B op analoge wijze tot verlies leiden. Kiest hij bijv. 1-2, dan kiest A 2-0 automatisch volgt 0-3 enz.

439. Gegeven zijn drie stapels schijven. A en B mogen beurtelings een schijf verplaatsen van een grotere naar een kleinere stapel, echter alleen als de grote stapel minstens 2 groter is dan de kleine. A begint. Wie geen schijf meer kan verplaatsen, verliest. Wie wint?
Onderstel de stapels bevatten 6, 16 en 26 schijven. We beginnen met van de drie stapels zoveel schijven af te nemen, dat de kleinste stapel tot 0 gereduceerd wordt. De stapels bevatten dan 0, 10 en 20 schijven. Zodra de kleinste stapel van 0 verhoogd wordt tot 1, nemen we van elk van de stapels 1 schijf weg, zodat permanent de kleinste stapel 0 schijven bevat.
Onderstel de grootte van de beide andere stapels is op een gegeven ogenblik p en q ($p \geqslant q$). Er zijn dan in principe drie mogelijkheden:
a van de grootste stapel wordt 1 schijf verplaatst naar de middelste, waardoor de stapels worden $p - 1$ en $q + 1$;
b van de grootste stapel wordt een schijf verplaatst naar de kleinste en van alle drie stapels wordt 1 schijf weggenomen, waardoor de stapels worden $p - 2$ en $q - 1$;
c van de middelste stapel wordt een schijf verplaatst naar de kleinste en van alle drie stapels wordt 1 schijf weggenomen, waardoor de stapels worden $p - 1$ en $q - 2$.
Wie de stand 0 en 0 toegespeeld krijgt, is verliezer.
We noemen nu (p, q) $(p \geqslant q)$ een winnende stand, als degeen die deze stand afgeeft, winnen zal bij optimale strategie;
we noemen (p, q) een verliezende stand, als degeen die deze stand afgeeft, verliest.
Een winnende stand is dus een stand van waaruit men alleen maar verliezende standen kan bereiken;
een verliezende stand is een stand van waaruit men tenminste één winnende stand kan bereiken; de stand (0, 0) is winnend.
Teken nu een grafische voorstelling. De winnende standen geven we aan met een dikke stip, de verliezende met een open kringetje. We beginnen het punt (0, 0) dik te maken. De rest gaat dan vanzelf. Men moet eraan denken, dat men zich langs de lijnen van de grafiek steeds beweegt van rechts naar links.



De stand (20, 10) blijkt een verliezende stand te zijn. Wie deze stand afgeeft, is verliezer. Wie deze stand ontvangt, is dus winnaar. Dat wil zeggen, dat A winnaar is.
De bovenstaande grafiek is van toepassing in alle gevallen waarin $p + q$ een drievoud is.
Is $p + q$ een drievoud + 1, dan moet men eindigen bij de winnende stand (1, 0).
Is $p + q$ een drievoud + 2, dan moet men eindigen bij de winnende stand (1, 1).
De bijbehorende grafieken zijn zonder moeite te ontwerpen.

Alternatieve oplossing (ontvangen van B. Kootstra).
Onderstel de grootte van de stapels is a, b, c waarin $a \geqslant b \geqslant c$.
Neem aan dat $a + b + c$ een drievoud is.
Er zijn drie mogelijkheden:

a $a - b$ is een drievoud, $b - c$ is een drievoud;
b $a - b$ is een drievoud $+ 1$, $b - c$ is een drievoud $+ 1$;
c $a - b$ is een drievoud $+ 2$, $b - c$ is een drievoud $+ 2$.

In geval b verminderen we a met 1 en vermeerderen we c met 1, waardoor geval a ontstaat.
In geval c verminderen we a met 1 en vermeerderen we b met 1 (of verminderen we b met 1 en vermeerderen we c met 1), waardoor geval a ontstaat.
Geval a gaat steeds over in geval b of geval c.
De winnende eindstand is van het type a. Dus:
wie b of c ontvangt, geeft a af en wint;
wie a ontvangt, verliest.
De gevallen $a + b + c$ is een drievoud $+ 1$ of een drievoud $+ 2$ worden analoog behandeld.

440. Een leerling moet uitrekenen $7 - 4(7 - 4(7 - 4))$ en rekent abusievelijk uit $(7 - 4)(7 - 4)(7 - 4)$.
Hij vindt toch wel het goede antwoord. Is dit toeval? Wanneer komt dit goed uit?
De vraag is: voor welke a, b is

$$a - b(a - b(a - b)) = (a - b)^3$$

of

$$a^3 - 3a^2b + 2ab^2 + ab - a = 0?$$

Zien we af van het triviale geval $a = 0$, dan kunnen we hiervoor schrijven

$$a^2 - 3ab + 2b^2 + b - 1 = 0$$
$$(a - 2b)(a - b) + b - 1 = 0$$

Stel $a - 2b = x$ en $a - b = y$, dan staat hier

$$xy + y - x - 1 = 0$$
$$(x + 1)(y - 1) = 0$$
$$x = -1 \vee y = 1$$
$$a = 2b + 1 \vee a = b + 1$$

Waarmee we overzicht verkregen hebben over de gevallen waarin het uitkomt.

Boekbesprekingen

Kiyosi Itô, '*Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations*'.

Het gerecenseerde boek bestaat uit een verzameling van artikelen gepresenteerd op een conferentie over Stochastische Differentiaalvergelijkingen (SDV) gehouden aan de Kyoti Universiteit in Japan in 1976. De artikelen zijn zeer gevarieerd. Typische onderwerpen zijn: nieuwe resultaten over SDV en hun uitbreidingen, resultaten over partiële differentiaal operatoren verkregen door studie van SDV, verschillende problemen in besturings- en schattingstheorie m.b.t. modellen beschreven door SDV in Euclidische ruimte of Hilbert ruimte, resultaten over tel-processen en een toepassingsgericht artikel over Boltzmann vergelijkingen. De artikelen zijn alfabetisch gerangschikt naar auteursnaam, hetgeen een minder geslaagde keuze genoemd kan worden. Het boek begint met een toegevoegd ondersteunend artikel geschreven door K. Itô en S. Watanabe. Dit artikel is buitengewoon geschikt voor iemand, die voor het volgen van een of ander artikel in dit boek zoekt naar enige achtergrondinformatie op dit vakgebied. Behalve voor specialisten op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening is het boek ook nuttig te noemen voor onderzoekers op het terrein van de partiële differentiaalvergelijkingen, stochastische besturingstheorie en mathematische physica. Artikelen over SDV met stochastische coëfficiënten bieden interessante mogelijkheden voor zinvolle toepassingen.
Het boek bevat (op één uitzondering na) geen numerieke voorbeelden en geen direkt op de praktijk gerichte toepassingen. Maar er zijn in dit boek wel veel toepassingen van SDV naar andere disciplines binnen de zuivere wiskunde.

De inhoud is:

Convergence of a Class of Markov Chains to Multi-demensional Degenerate Diffusion Processes Ken-iti Sato
Construction of a Solution of Linear Stochastic Evolution Equations on a Hilbert Space Akinobu Shimizu
On the Optimal Control for Distributed Parameter Systems with White Noise Coefficients Yoshifumi Sunahara, Shin'ichi Aihara, Muneshi Koyama, & Fumio Kojima
On the Uniqueness of Markov Process Associated with the Boltzmann Equation of Maxwellian Molecules Hiroshi Tanaka
On the Stochastic Differential Equation for a Brownian Motion with Oblique Reflection on the Half Plane Masaaki Tsuchiya
Excursion Point Process of Diffusion and Stochastic Integral Shinzo Watanabe
Approximation of Markovian Control Systems by Discrete Control Policies Keigo Yamada
Localization of Conditions on the Coefficients of Diffusion Type Equations in Exestence Theorems M.P. Yershov

A. Bagchi

D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear mapping of monotone type*, Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan de Rijn, 1978. 350 pp., prijs f 86,–.

Met enige overdrijving zou men kunnen stellen dat het hoofdprobleem van de wiskundige analyse bestaat uit het vinden van oplossingen voor vergelijkingen van het type $Tu = f$ of $u + Tu = f$. Hier is f een gegeven funktie, T is een gegeven afbeelding, niet noodzakelijk lineair, en u is de onbekende funktie. Bij eerste benadering mag men aannemen dat T lineair is, en in dat geval zijn er tal van oplossingsmethoden, afkomstig uit matrixtheorie, de theorie van integraalvergelijkingen en functionaalanalyse, beschikbaar. Voor niet-lineaire vergelijkingen – het onderwerp van het onderhavige boek – is de situatie minder rooskleurig. Niet-lineaire analyse is minder ver ontwikkeld.
Een van de oudste methoden uit de niet-lineaire analyse maakt gebruik van de aanwezigheid van vaste punten. Algemeen bekend zijn de stelling van Banach over vaste punten voor een contractie-afbeelding en haar toepassingen op differentiaal- en integraalvergelijkingen. In de dertiger jaren heeft Schauder de beroemde vaste-punt-stelling van L. E. J. Brouwer uitgebreid naar oneindige dimensies, en hij bewees het volgende: als Ω een begrensde, gesloten en convexe deelverzameling is van een Banachruimte en als $T: \Omega \to \Omega$ een compacte afbeelding is, dan heeft de vergelijking $Tu = u$ tenminste één oplossing in Ω. Deze stelling van Schauder, het principe van Leray-Schauder, het begrip topologische afbeeldingsgraad e.d. vormen de voornaamste bouwstenen van de niet-lineaire analyse uit de jaren dertig en komen uitvoerig aan de orde in het tweede hoofdstuk van dit boek.
Het leeuwedeel van het boek gaat echter over een theorie die van veel recenter datum is en betrekking heeft op niet-lineaire afbeeldingen van monotoon type. Bij afwezigheid van compactheid is monotonie vaak een nuttig begrip. De theorie van monotone afbeeldingen kwam in de jaren zestig tot bloei vooral dankzij het werk van Brézis en F. Browder. Een afbeelding T met definitiegebied $D(T)$ in een reële Banachruimte X en met waardenverzameling in de duale van X wordt monotoon genoemd als $(Tx - Ty, x - y) \geqq 0$ voor alle x en y in $D(T)$. De algemene theorie van monotone afbeeldingen komt aan de orde in hoofdstuk 3. Een vaste-punt-stelling wordt bewezen voor coercieve pseudo-monotone afbeeldingen in reflexieve Banachruimten. In hoofdstuk 4 worden monotone afbeeldingen gebruikt voor de bestudering van Hammerstein integraalvergelijkingen. De vergelijking $Tu = f$ wordt in hoofdstuk 5 onderzocht met behulp van redeneringen die gebruik maken van het begrip homotopie. De antipode-stelling van Borsuk wordt hier ook bewezen voor bepaalde niet-lineaire afbeeldingen van monotoon type die homotoop zijn met oneven operatoren. Eigenwaarde-problemen voor maximale monotone operatoren worden beschouwd. Het laatste hoofdstuk is gewijd aan variatie-problemen en ongelijkheden. Hier vindt men ook toepassingen op randwaardeproblemen. De auteurs hebben aan ieder hoofdstuk bibliografische aantekeningen toegevoegd, die de lezer ongetwijfeld zullen helpen zijn weg door de literatuur te vinden.
De wiskundige taal van dit boek is de functionaalanalyse. De belangrijkste begrippen uit de topologie, de maattheorie en de functionaalanalyse, die in het boek worden gebruikt, zijn bijeengebracht in het eerste hoofdstuk. Het boek is geschreven in de lemma-propositie-theorema stijl; het is niet gemakkelijk toegankelijk. De algemene indruk is dat het boek een goed en bij de tijds verslag geeft

van wat monotonie kan doen in de analyse van niet-lineaire vergelijkingen. Als zodanig is het een waardevolle bijdrage tot de mathematische literatuur.

M. A. Kaashoek

Drs. H. Alblas, '*Systeemprogrammatuur, een indeling met de machine structuur van de PDP 11 als voorbeeld*', 240 blz., *f* 39,50, Academic Service, Den Haag.

In de programmatuur (of het conglomeraat van programma's) van een computersysteem onderscheidt men in de informatica twee soorten programma's: gebruikersprogramma's die ten doel hebben het systeem een of andere taak (b.v. een berekening of een administratieve handeling) te laten verrichten, en systeemprogramma's die een ondersteunende functie hebben. De laatste categorie omvat besturingsprogramma's voor het computersysteem (programma's die de supervisie voeren over de gang van zaken en die bepalen wanneer en in welke volgorde de taken moeten worden uitgevoerd), programma's die de in- en uitvoer van gegevens voor de gebruikersprogramma's en de zgn. vertaalprogramma's (programma's die gebruikersprogramma's die in een 'hogere' programmeertaal zijn opgesteld omzetten naar machine-code programma's). Het boek van H. Alblas behandelt de systeemprogrammering, een van nature technisch onderwerp. De auteur verdient lof voor de wijze waarop hij de materie op prettig leesbare manier in het boek presenteert. Als computer koos hij een echte en geen abstracte machine, daarbij aansluitend op de traditie in dit onderdeel van de informatica. Tot de leesbaarheid draagt bij de duidelijke wijze waarop de betekenis van de machine instructies wordt vastgelegd en de uitwerking van het idee om enkele bekende constructies in een hogere programmeertaal om te zetten (vertalen) in reeksen machine-instructies. Het is jammer dat de meest technisch georiënteerde paragrafen van hoofdstuk 4 (de 'kleine letters') zó klein zijn afgedrukt dat alleen jonge ogen zich aan de bestudering ervan zullen wagen. Eveneens jammer is het dat het laatste hoofdstuk over 'operating systems' (een belangrijk onderwerp in deze tak van de informatica) er mager vanaf komt met een beschrijving in slechts drie pagina's. Deze tekortkomingen worden echter ruimschoots gecompenseerd door duidelijke presentatie van zaken als adressering, afbeelding van gegevens op geheugens, communicatie van rekenorgaan met randapparatuur, assembleren, linken en laden. Een index van ruim 400 woorden vergemakkelijkt het opzoeken van onderwerpen. Uw recensent beveelt het boek aan voor geïnteresseerden die een eerste oriëntatie op het gebied van de computerprogrammering al achter de rug hebben.

A. Ollongren

Mededelingen

JAARVERGADERING/STUDIEDAG van de Nederlandse Vereniging van Wiskunde Leraren.

Tijd/plaats
Deze jaarvergadering/studiedag zal gehouden worden op zaterdag 31 oktober 1981 in het gebouw van de S.O.L., Archimedeslaan 16, Utrecht.

Maaltijd
Voor deelname aan de lunch wordt u verzocht vóór 10 oktober *f* 10,– over te maken op giro 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding 'lunch studiedag'.

Thema
Als thema voor het studiegedeelte van de dag is gekozen: *De microcomputer en het wiskunde-onderwijs.* Zie hiervoor ook het augustusnummer van Euclides.

Programma

9.30 uur	aankomst en koffie
10.00 uur	huishoudelijk gedeelte, waarin de jaarrede
10.30 uur	inleiding over inhoud en samenhang van de verschillende werkgroepen.
11.00 uur	werkgroepen over o.a. – computer als hulp van docent bij statistiek – numerieke wiskunde – wat doen de NLO's op het gebied van computers – HEWET
12.15 uur	lunch
14.00 uur	lezing
15.00 uur	werkgroepen (zie boven)
16.15 uur	voorstel tot wijziging der statuten, rondvraag en sluiting.

Kosten voor niet-leden
Eventuele niet-leden die de studiedag wensen bij te wonen wordt verzocht *f* 10,– over te maken op giro 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam onder vermelding 'studiedag niet-lid'.
Niet-leden die tevens de lunch gebruiken betalen dus in totaal *f* 20,–.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1980-31 juli 1981.

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. Bozuwa, F. F. J. Gaillard, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mahieu en mw. drs. N. C. Verhoef.
Op 20 september vond te Leuven een gemeenschappelijke bestuursvergadering plaats van de besturen van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en op 28 maart was er een gemeenschappelijke studiedag voor de leden van beide verenigingen in het Koninklijk Atheneum te Kapellen (België) met als thema: 'De geschiedenis van de wiskunde en het onderwijs'. Prof. dr. A. W. Grootendorst en Prof. dr. G. Hirsch hielden hier inleidingen, getiteld: 'Geschiedenis van de wiskunde en onderwijs in de wiskunde' en 'De rol van de geschiedenis van de wiskunde in het wiskundeonderwijs'.
Vlaamse bestuursleden waren aanwezig op de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en Nederlandse bestuursleden waren aanwezig op de jaarvergadering van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars. Op zaterdag 8 november is de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering was gecombineerd met een studiedag, die

verzorgd was door de didactiekcommissie. Als thema voor deze dag had zij gekozen: 'Gonio als invalshoek'. Na een inleiding door L. Muskens was er voor de aanwezigen de mogelijkheid deel te nemen aan een werkgroep met als onderwerp:

- Gonio en taal o.l.v. F. Dolmans, J. v. Dormolen, C. Hollman, C. Hoogsteder en L. Muskens,
- Gonio en de omgang tussen leraar en leerling o.l.v. G. Doevendans, B. Knip en T. Vandeberg,
- Vlieg er eens in o.l.v. J. de Lange en N. Querelle,
- Landmeetkunde o.l.v. C. Nagtegaal en S. Kemme,
- Periodieke functies o.l.v. M. Kindt en R. Reijenga.

Tijdens de lunchpauze was er een 'markt' waar kennis genomen kon worden van kreatieve en didactische vondsten. Na de lunchpauze hield H. Bos een inleiding over 'Geschiedenis van de gonio'. De aanwezigen, van wie 170 de presentielijst tekenden, lieten na afloop van de themadag zeer enthousiaste geluiden horen.
Het mei-nummer van Euclides was als 'special' geheel aan deze dag gewijd. Evenals vorige jaren werden ook dit jaar regionale bijeenkomsten ter bespreking van de eindexamens wiskunde gehouden. Deze vonden plaats op 11 mei op 4 plaatsen voor lbo-c (leao, lhno, llo en lmo), op 20 plaatsen voor mavo-4 en in Utrecht voor wiskunde II vwo, op 12 mrt op 6 plaatsen voor lto-c en mavo-3, en op 6 plaatsen voor havo en op 14 mei op 6 plaatsen voor wiskunde I vwo.
Op 16 januari overleed de heer B. Verdouw, die gedurende vele jaren de ledenadministratie van de vereniging verzorgde.
Dit jaar verscheen de brochure 'Rekening houden met individuele verschillen' door Francis Meester, George Schoemaker en Jaap Vedder. Dit is een publikatie van de didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Deze publikatie is uitgegeven door en met steun van het IOWO.
Op 18 december was het bestuur aanwezig bij de afscheidsreceptie in verband met de opheffing van het IOWO per 1 januari 1981.
De werkgroep, die de opdracht heeft om onder leiding van F. J. Mahieu een advies samen te stellen over de doelstellingen van het mavo- en het lto-c-examen en de gewenste vorm van dit examen heeft dit jaar hard gewerkt en hoopt binnenkort met haar rapport te komen.
In augustus was te Berkeley (USA) het vijfde ICMI-congres. Van de mogelijkheid om een subsidie van de vereniging te krijgen om dit congres te bezoeken hebben 5 leden gebruik gemaakt.
Het bestuur vergaderde dit jaar 13 maal, waarvan éénmaal met de inspecteurs J. Boersma, drs. W. de Jong, P. Lafeber, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman.

Winter-symposium 1982

Het Wiskundig Genootschap organiseert in 1982 op zaterdag, 9 januari een wiskunde symposium voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden.
Het thema van dit symposium

'Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven.'

zal worden toegelicht door de sprekers Dr. F. Goffree, S.L.O. Enschede; Prof. Dr. J. A. Sparenberg, Universiteit Groningen; Prof. Dr. J. Wessels, T.H. Eindhoven.

Programma.
Plaats, Chr. Lyceum, Kerkewijk te Veenendaal
Datum, Zaterdag 9 januari 1982
9.45-10.30 Ontvangst
10.30-11.30 Wiskunde-onderwijs en Dagelijks Leven Dr. F. Goffree
11.30-12.30 Over het maken van modellen Prof. Dr. J. A. Sparenberg
12.30-14.00 Lunchpauze
14.00-15.00 Processen uit het dagelijks leven Prof. Dr. J. Wessels

Aanmelding.
Men gelieve zich uiterlijk 15 december 1981 schriftelijk te melden aan G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, 3956 EN Leersum en *f* 10,– naar zijn postgiro 468081 over te maken indien men aan de lunch wil deelnemen.
Voor inlichtingen: G. W. de Vries, Tel. 03434-3059.

Wijziging der Statuten

Het bestuur stelt voor de statuten van de vereniging zò te wijzigen, dat ze worden aangepast aan de huidige wettelijke regelingen voor verenigingen.
Het onderstaande concept is opgesteld door mr. R. A. M. Tromp, notaris te Zutphen.
Het bestuur stelt voor tot het wijzigen van de statuten te besluiten op de jaarvergadering op 31 october a.s.

Th. J. Korthagen

Statuten:

NAAM, ZETEL EN DUUR
Artikel 1
1. De vereniging draagt de naam: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en is gevestigd te Amsterdam.
De vereniging is een voortzetting van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).
2. De vereniging is opgericht op dertien december negentienhonderd vijfenvijftig en met ingang van heden aangegaan voor onbepaalde tijd.

DOEL
Artikel 2
Het doel van de vereniging is aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen die betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde aan scholen genoemd in de Wet op het Voortgezet Onderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs.

Artikel 3
De vereniging tracht haar doel te bereiken:
a. door het houden van vergaderingen van de leden;
b. door het doen van publikaties;
c. door het nemen van andere maatregelen, die tot het bereiken van het doel wenselijk worden geacht.

VERENIGINGSJAAR
Artikel 4
Het verenigingsjaar loopt van een augustus tot en met eenendertig juli daaropvolgend.

LIDMAATSCHAP
Artikel 5
1. Lid van de vereniging kunnen worden natuurlijke personen die leraar of lerares zijn of geweest zijn, in de wiskunde aan scholen als bedoeld in de Wet op het Voortgezet Onderwijs.
Door het bestuur kunnen ook als lid worden toegelaten andere personen op wier lidmaatschap, in verband met het doel van de vereniging, prijs wordt gesteld.
2. Voorts kent de vereniging ereleden, die alszodanig door de algemene vergadering dienen te worden benoemd.
Ereleden hebben dezelfde rechten en plichten als de leden, doch behoeven geen jaarlijkse contributie te voldoen.
3. Het lidmaatschap vangt aan na acceptatie door het bestuur van een schriftelijke aanmelding.

Artikel 6.
1. Het lidmaatschap eindigt door:
a. Overlijden van het lid.
b. Schriftelijke opzegging door het lid.

c. Opzegging namens de vereniging door het bestuur. Deze kan onder meer geschieden wanneer een lid heeft opgehouden aan de vereisten door of krachtens de statuten voor het lidmaatschap gesteld, te voldoen en ook wanneer redelijkerwijs van de vereniging niet gevergd kan worden het lidmaatschap te laten voortduren.
d. Ontzetting.

Deze kan alleen worden uitgesproken wanneer een lid in strijd met de statuten, reglementen of besluiten van de vereniging handelt of de vereniging op onredelijke wijze benadeelt.

2. Opzegging van het lidmaatschap door een lid of door de vereniging kan slechts geschieden tegen het einde van een verenigingsjaar en met inachtneming van een opzegtermijn van tenminste één maand.

Binnen één maand na ontvangst van de kennisgeving van het besluit tot opzegging van het lidmaatschap door de vereniging, staat het betreffende lid beroep open op de algemene vergadering.

3. De ontzetting vindt plaats door een besluit van de algemene vergadering. Dit besluit dient te worden genomen met een meerderheid van tenminste twee/derde der geldig uitgebrachte stemmen.

4. Wanneer het lidmaatschap in de loop van een verenigingsjaar eindigt, blijft desniettemin de jaarlijkse bijdrage voor het geheel verschuldigd.

CONTRIBUTIE.

Artikel 7.

De leden betalen jaarlijks een contributie die door de algemene vergadering wordt vastgesteld.

De contributie is invorderbaar bij de aanvang van het verenigingsjaar of zoveel later als hij voor dat jaar is vastgesteld.

BESTUUR.

Artikel 8.

1. Het bestuur bestaat uit tenminste vijf personen die door de algemene vergadering worden gekozen uit de leden.

De bestuursleden verdelen onderling de funkties.

Het is niet mogelijk dat twee of meer funkties in één persoon worden verenigd.

2. Voor een te vervullen vacature in het bestuur wordt door het bestuur een voordracht opgemaakt, welke wordt vermeld bij de oproep tot de desbetreffende algemene vergadering.

Tot veertien dagen vóór de vergadering kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door tenminste vijf leden.

3. Bestuursleden worden gekozen voor een termijn van maximaal drie jaar. Een aftredend bestuurslid is terstond herkiesbaar.

In vacatures dient zo spoedig mogelijk te worden voorzien, tenzij de algemene vergadering, in het geval het aantal der overige in funktie zijnde bestuursleden nog niet beneden het vereiste minimum is gedaald, besluit een vacature niet te doen vervullen.

Tijdens het bestaan van vacatures blijft het bestuur bevoegd tot het nemen van besluiten.

4. Een bestuurslid kan te allen tijde worden ontslagen of geschorst door de algemene vergadering, mits het besluit daartoe wordt genomen met een meerderheid van tenminste twee/derde der geldig uitgebrachte stemmen.

VERTEGENWOORDIGING.

Artikel 9.

1. Van de voorzitter, de secretaris en de penningmeester, vertegenwoordigen twee personen gezamenlijk de vereniging in en buiten rechte.

2. Het bestuur heeft de voorafgaande goedkeuring nodig van de algemene vergadering voor het sluiten van overeenkomsten tot het kopen, vervreemden of bezwaren van registergoederen, of het sluiten van overeenkomsten waarbij de vereniging zich als borg of hoofdelijk medeschuldenaar verbindt, zich voor een derde sterk maakt of zich tot zekerheidsstelling voor een schuld van een derde verbindt.

ALGEMENE VERGADERING.

Artikel 10.

1. Tenminste eenmaal per jaar wordt door het bestuur een algemene vergadering bijeengeroepen.

De oproeping tot een algemene vergadering dient schriftelijk te geschieden aan de adressen van de leden en ereleden volgens het ledenregister.

De termijn van oproeping bedraagt tenminste vier weken. Bij de oproeping worden de te behandelen onderwerpen vermeld.
2. Uiterlijk in de maand januari wordt een algemene vergadering gehouden, waarin in ieder geval:
a. het bestuur zijn jaarverslag uitbrengt en, onder overlegging van een balans en een staat van baten en lasten, rekening en verantwoording doet over zijn in het afgelopen verenigingsjaar gevoerd bestuur;
b. de kascommissie verslag doet van haar bevindingen;
c. de jaarlijkse bestuursverkiezing wordt gehouden;
d. de kascommissie voor het lopende jaar wordt benoemd;
e. de contributie voor dat jaar wordt vastgesteld.

Artikel 11.
Buitengewone algemene vergaderingen worden gehouden:
a. zo dikwijls als het bestuur dit nodig acht;
b. indien tenminste een zodanig aantal leden, doch niet meer dan vijfentwintig, als bevoegd is tot het uitbrengen van een/tiende gedeelte der stemmen in de algemene vergadering, hierom verzoekt.
Laatstgemeld verzoek dient, onder vermelding van de te behandelen agendapunten, schriftelijk aan het bestuur te worden gedaan.
Het bestuur is verplicht binnen veertien dagen na het verzoek een ledenvergadering uit te schrijven.

STEMRECHT
Artikel 12.
1. Ieder (ere)lid is bevoegd tot het uitbrengen van één stem in de algemene vergadering.
Alle besluiten worden genomen met volstrekte meerderheid van geldig uitgebrachte stemmen, voor zover de statuten geen andere meerderheid voorschrijven.
Blanco stemmen en ongeldige stemmen worden geacht niet te zijn uitgebracht.
2. Stemmingen over personen geschieden schriftelijk bij ongetekende gesloten briefjes.
Stemmingen over zaken geschieden mondeling, tenzij door het bestuur of de vergadering schriftelijke stemming wordt verlangd.
Stemming over personen, of zaken bij acclamatie is eveneens mogelijk.
3. Bij het staken der stemmen over zaken wordt het voorstel geacht te zijn verworpen.
4. Indien bij stemming over personen niemand de volstrekte meerderheid heeft verworven, vindt een tweede vrije stemming plaats. Wordt ook dan geen volstrekte meerderheid verkregen, dan wordt herstemd tussen de personen, die bij de tweede stemming de meeste stemmen op zich verenigden, dan wel degene die het grootste aantal stemmen verkreeg en degene(n) die het daarna volgende grootste aantal stemmen verkre(e)g(en).
Bij deze derde stemming is een gewone meerderheid beslissend; staken dan de stemmen, dan beslist het lot.

HUISHOUDELIJK REGLEMENT.
Artikel 13.
De algemene vergadering stelt een huishoudelijk reglement vast dat nadere regels bevat betreffende de rechten en verplichtingen van de leden, alsmede het beheer en de inrichting van de vereniging.
Het huishoudelijk reglement mag niet in strijd zijn met de wet, ook waar die geen dwingend recht bevat, noch met de statuten.

STATUTENWIJZIGING.
Artikel 14.
1. De statuten van de vereniging kunnen, op voorstel van het bestuur of van tenminste vijfentwintig leden, slechts worden gewijzigd door een besluit van de algemene vergadering waartoe is opgeroepen met de mededeling dat aldaar wijziging van de statuten zal worden voorgesteld.
Het besluit behoeft tenminste twee/derde van de geldig uitgebrachte stemmen.
2. Zij die de oproeping tot de vergadering hebben gedaan moeten tenminste vijf dagen vóór de vergadering een afschrift van het betreffende voorstel, waarin de voorgedragen wijziging woordelijk is opgenomen, op een daartoe geschikte plaats voor de leden ter inzage leggen tot na afloop van de dag waarop de vergadering wordt gehouden.
3. De gewijzigde statuten treden niet eerder in werking dan nadat hiervan een notariële akte is opgemaakt. Tot het doen verlijden van deze akte is ieder bestuurslid bevoegd.

ONTBINDING.
Artikel 15.
De vereniging kan worden ontbonden door een besluit van de algemene vergadering.
Het bepaalde in het voorgaande artikel is van overeenkomstige toepassing.
Bij het ontbindingsbesluit wordt bepaald wie met de vereffening zullen worden belast en op welke wijze een eventueel batig saldo zal worden besteed.

SLOTBEPALING.
Artikel 16.
In alle gevallen waarin de statuten of het huishoudelijk reglement niet voorzien, beslist het bestuur.

Oriënterend colloquium voor leraren

Onder bovengenoemde titel wordt er door de afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum jaarlijks een cursus georganiseerd voor wiskundeleraren VWO/HAVO/HBO en andere belangstellenden. Deze cursussen zijn bedoeld om de deelnemers de gelegenheid te geven hun kennis van de wiskunde uit te breiden dan wel op te frissen. Het onderwerp voor het cursusjaar 1981/1982 is:

MEETKUNDIGE THEORIE VAN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Dit betreft de bestudering van gewone differentiaalvergelijkingen aan de hand van hun faseportret (het 'plaatje' met oplossingskrommen). Aan de orde komt o.a. het kwalitatief gedrag van oplossingen (evenwichtspunten, periodieke en bijna-periodieke bewegingen, limietverzamelingen). Daarnaast zal aandacht besteed worden aan toepassingen.
Voor het volgen van de cursus is niet veel specifieke voorkennis nodig. Er zal getracht worden zoveel mogelijk aan te sluiten bij de kennis van de deelnemers.

Aanvangsdatum	: woensdag 23 september 1981
Tijd	: 19.30-21.15 uur
Frequentie	: wekelijks, tot half maart, met een onderbreking gedurende de kerstvakantie
Plaats	: Amsterdam; nadere plaatsaankondiging volgt nog
Inlichtingen en opgave	: J. de Vries Mathematisch Centrum Kruislaan 413 1098 SJ Amsterdam tel. 020-592 41 70

N.B. Het is noodzakelijk zich telefonisch of schriftelijk op te geven voor de cursus, o.a. in verband met bekendmaking van de plaats, waar de cursus gehouden zal worden.

INHOUD

ADRESSEN VAN DE AUTEURS

J. Teugels, Kath. Universiteit Leuven, Departement Wiskunde, Celestijnlaan 200B, B-3030 Heverlee, België.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.